

# 2024 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

## 高等数学(二)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间 150 分钟.

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

### 第 I 卷(选择题, 共 84 分)

得分	评卷人

一、选择题(1~12 小题, 每小题 7 分, 共 84 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = 2$ , 则  $m =$  【    】

- A. 0                      B.  $\frac{1}{2}$                       C. 1                      D. 2

2. 设  $y = \ln x + x^2$ , 则  $y' =$  【    】

- A.  $\frac{1}{x} + 2x$               B.  $\frac{1}{x} - 2x$               C.  $\ln x + 2x$               D.  $\ln x - 2x$

3. 设  $y = xe^{2x}$ , 则  $y' =$  【    】

- A.  $(1+x)e^{2x}$               B.  $(1+2x)e^{2x}$               C.  $2xe^{2x}$               D.  $(1-2x)e^{2x}$

4. 设随机变量  $X$  的概率分布为

$X$	3	4	5
$P$	0.1	$a$	0.6

则  $a =$  【    】

- A. 0.1                      B. 0.2                      C. 0.3                      D. 0.4

5. 曲线  $y = xe^{-x}$  的拐点坐标为 【    】

- A. (0,0)                      B.  $(2, 2e^{-2})$               C.  $(-1, -e)$               D.  $(1, e^{-1})$

6. 设  $f(x)$  的一个原函数为  $e^{x^2}$ , 则  $f(x) =$  【    】

- A.  $e^{x^2}$                       B.  $2xe^{x^2}$                       C.  $xe^{x^2}$                       D.  $2e^{x^2}$

7.  $\int_{-1}^1 (\arctan x + x^2) dx =$  【   】

- A.  $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$       B.  $\frac{\pi}{2}$       C.  $\frac{2}{3}$       D. 0

8.  $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx =$  【   】

- A. -4      B. -2      C. 0      D. 2

9.  $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx =$  【   】

- A.  $x^2 + x + \ln |x| + C$       B.  $x^2 + 2x + \ln |x| + C$   
 C.  $\frac{x^2}{2} + x + \ln |x| + C$       D.  $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln |x| + C$

10. 设  $z = 2xy + \frac{x}{y}$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial y} =$  【   】

- A.  $2x + \frac{1}{y}$       B.  $2y + \frac{1}{y}$   
 C.  $2x + \frac{x}{y^2}$       D.  $2x - \frac{x}{y^2}$

11. 设  $z = xf(y)$ , 其中  $f$  可导, 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$  【   】

- A.  $f'(y)$       B.  $x$       C.  $f(y)$       D.  $xf(y)$

12. 设  $A, B$  为随机事件, 则  $P(A - B) = P(A) - P(B)$  的充要条件是 【   】

- A.  $A \subset B$       B.  $P(B - A) = 0$   
 C.  $A = B$       D.  $P(A - B) = 0$

**第 II 卷 (非选择题, 共 66 分)**

得 分	评卷人

二、填空题 (13~15 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

13. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 1, \\ a \cos \pi x, & x < 1 \end{cases}$  在  $x = 1$  处连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

14. 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+2a}{x-a} \right)^x = e^6$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

15. 曲线  $y = x^3$  在点  $(1, 1)$  处法线的方程为 \_\_\_\_\_.

得 分	评卷人

三、解答题(16~18题,每小题15分,共45分.解答应写出推理、演算步骤)

16.(本题满分15分)

求函数  $f(x) = x^2(x-1)^2$  的单调区间和极值.

17. (本题满分 15 分)

计算  $\int \sin^2 x dx$ .

18. (本题满分 15 分)

求由抛物线  $y^2 = 2x$  和直线  $x + y - 4 = 0$  所围成的图形的面积.

# 参考答案及解析

## 一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小代换的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x} = m = 2.$

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了导数的计算的知识点.

【应试指导】  $y' = (\ln x + x^2)' = \frac{1}{x} + 2x.$

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的求导法则的知识点.

【应试指导】  $y' = (xe^{2x})' = e^{2x} + x(e^{2x})' = (1 + 2x)e^{2x}.$

4.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了概率分布的性质的知识点.

【应试指导】  $0.1 + a + 0.6 = 1$ , 所以  $a = 0.3$ .

5.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的拐点的知识点.

【应试指导】  $y' = (xe^{-x})' = (1-x)e^{-x}$ ,  $y'' = (x-2)e^{-x}$ . 令  $y'' = 0$ , 得  $x = 2$ . 当  $x < 2$  时,  $y'' < 0$ ; 当  $x > 2$  时,  $y'' > 0$ . 所以, 拐点为  $(2, 2e^{-2})$ .

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了原函数的概念的知识点.

【应试指导】  $f(x) = (e^{x^2})' = e^{x^2} (x^2)' = 2xe^{x^2}.$

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质和计算的知识点.

【应试指导】 原式  $= \int_{-1}^1 \arctan x dx + \int_{-1}^1 x^2 dx = 0 + 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了用换元法计算定积分的知识点.

【应试指导】 令  $\sqrt{x} = t$ , 则  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ . 当  $x = 0$  时,  $t = 0$ ; 当  $x = \pi^2$  时,  $t = \pi$ .  $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx = 2 \int_0^{\pi} t \cos t dt =$

$2 \int_0^{\pi} t dsint = 2(t \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin t dt) = 2 \cos t \Big|_0^{\pi} = -4.$

9.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了不定积分的计算的知识点.

【应试指导】  $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx = \int \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| + C.$

10.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了偏导数的计算的知识点.

【应试指导】  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - \frac{x}{y^2}.$

11.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二阶偏导数的计算的知识点.

【应试指导】  $\frac{\partial z}{\partial x} = f(y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(y).$

12.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了概率的性质的知识点.

【应试指导】  $P(A-B) = P(A) - P(AB)$ , 故  $P(A-B) = P(A) - P(B)$  的充要条件是  $P(AB) = P(B)$ , 即  $B \subset A$ , 故  $P(B-A) = 0$ .

## 二、填空题

13.【答案】 -2

【考情点拨】 本题考查了连续函数的性质的知识点.

【应试指导】 因为  $f(x)$  在  $x=1$  处连续, 所以  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ , 而  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} a \cos \pi x = -a$ ,

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = 2$ , 故有  $-a = 2$ , 即  $a = -2$ .

14.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了两个重要极限的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}} = e^{3a} = e^6$ , 故  $a = 2$ .

15.【答案】  $x + 3y - 4 = 0$

【考情点拨】 本题考查了法线方程的知识点.

【应试指导】  $y' = 3x^2$ , 则  $k_{\text{切}} = 3x^2 \Big|_{x=1} = 3$ , 故  $k_{\text{法}} = -\frac{1}{3}$ , 则法线方程为  $y-1 = -\frac{1}{3}(x-1)$ , 化简为  $x + 3y - 4 = 0$ .

## 三、解答题

16.  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ .

因为  $f(x) = x^2(x-1)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$ , 则

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 4x^3 - 6x^2 + 2x \\
 &= 2x(2x^2 - 3x + 1) \\
 &= 2x(x-1)(2x-1),
 \end{aligned}$$

令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$ .

列表:

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值 $f(0) = 0$	$\nearrow$	极大值 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$	$\searrow$	极小值 $f(1) = 0$	$\nearrow$

所以,  $f(x)$  的单调递增区间为  $(0, \frac{1}{2}), (1, +\infty)$ ; 单调递减区间为  $(-\infty, 0), (\frac{1}{2}, 1)$ .

极大值为  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$ , 极小值为  $f(0) = f(1) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 17. \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\
 &= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\
 &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.
 \end{aligned}$$

$$18. \text{联立} \begin{cases} y^2 = 2x, \\ x + y - 4 = 0, \end{cases} \text{解得交点 } (2, 2), (8, -4).$$

所以所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-4}^2 (4 - y - \frac{y^2}{2}) dy \\
 &= (4y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}) \Big|_{-4}^2 \\
 &= 18.
 \end{aligned}$$